

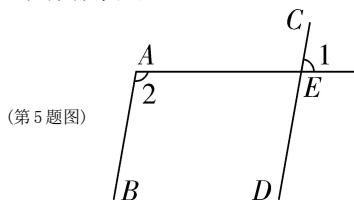
2019 年长沙市初中学业水平考试数学试卷

满分 120 分，考试时间 120 分钟

班级 _____ 姓名 _____ 得分 _____

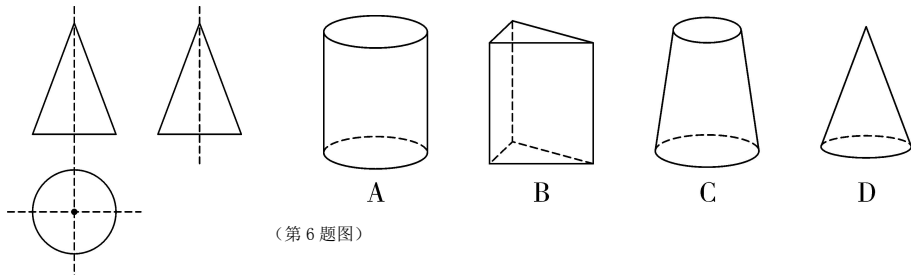
一、选择题(在下列各题的四个选项中，只有一项是符合题意的。请在答题卡中填涂符合题意的选项。本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分)

- 下列各数中，比-3 小的数是()
A. -5 B. -1 C. 0 D. 1
- 根据《长沙市电网供电能力提升三年行动计划》，明确到 2020 年，长沙电网建设改造投资规模达到 15000000000 元，确保安全供用电需求。数据 15000000000 用科学记数法表示为()
A. 15×10^9 B. 1.5×10^9 C. 1.5×10^{10} D. 0.15×10^{11}
- 下列计算正确的是()
A. $3a+2b=5ab$ B. $(a^3)^2=a^6$ C. $a^6 \div a^3=a^2$ D. $(a+b)^2=a^2+b^2$
- 下列事件中，是必然事件的是()
A. 购买一张彩票，中奖 B. 射击运动员射击一次，命中靶心
C. 经过有交通信号灯的路口，遇到红灯 D. 任意画一个三角形，其内角和是 180°
- 如图，平行线 AB, CD 被直线 AE 所截， $\angle 1=80^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是()
A. 80° B. 90° C. 100° D. 110°



(第 5 题图)

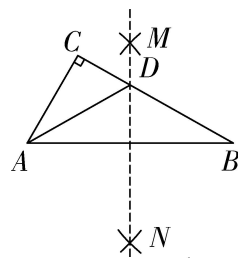
- 某个几何体的三视图如图所示，该几何体是()



(第 6 题图)

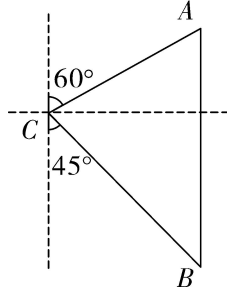
- 在庆祝新中国成立 70 周年的校园歌唱比赛中，11 名参赛同学的成绩各不相同，按照成绩取前 5 名进入决赛，如果小明知道了自己的比赛成绩，要判断能否进入决赛，小明需要知道这 11 名同学成绩的()
A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差
- 一个扇形的半径为 6，圆心角为 120° ，则这个扇形的面积是()
A. 2π B. 4π C. 12π D. 24π

- 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ，分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于 M, N 两点，作直线 MN ，交 BC 于点 D ，连接 AD ，则 $\angle CAD$ 的度数是()
A. 20° B. 30° C. 45° D. 60°



(第 9 题图)

- 如图，一艘轮船从位于灯塔 C 的北偏东 60° 方向，距离灯塔 60 n mile 的小岛 A 出发，沿正南方向航行一段时间后，到达位于灯塔 C 的南偏东 45° 方向上的 B 处，这时轮船 B 与小岛 A 的距离是()
A. $30\sqrt{3}$ n mile B. 60 n mile
C. 120 n mile D. $(30+30\sqrt{3})$ n mile

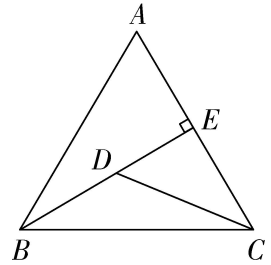


(第 10 题图)

- 《孙子算经》是中国传统数学的重要著作，其中有一道题，原文是：“今有木，不知长短，引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺，木长几何？”意思是：用一根绳子去量一根木头的长，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量木头，则木头还剩余 1 尺，问木头长多少尺？可设木头长为 x 尺，绳子长为 y 尺，则所列方程组正确的是()
A. $\begin{cases} y=x+4.5, \\ 0.5y=x-1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y=x+4.5, \\ y=2x-1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y=x-4.5, \\ 0.5y=x+1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y=x-4.5, \\ y=2x+1 \end{cases}$

12. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10$, $\tan A=2$, $BE \perp AC$ 于点 E , D 是线段 BE 上的一个动点, 则 $CD + \frac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值是()

(第 12 题图)



- A. $2\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{5}$ C. $5\sqrt{3}$ D. 10

二、填空题(本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

13. 式子 $\sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

14. 分解因式: $am^2 - 9a =$ _____.

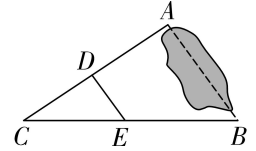
15. 不等式组 $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 3x-6 < 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

16. 在一个不透明的袋子中有若干个小球, 这些球除颜色外无其他差别. 从袋中随机摸出一球, 记下其颜色, 这称为一次摸球试验, 然后把它重新放回袋中并摇匀, 不断重复上述过程. 以下是利用计算机模拟的摸球试验统计表:

摸球试验次数	100	1000	5000	10000	50000	100000
“摸出黑球”的次数	36	387	2019	4009	19970	40008
“摸出黑球”的频率(结果保留小点后三位)	0.360	0.387	0.404	0.401	0.399	0.400

根据试验所得数据, 估计“摸出黑球”的概率是_____. (结果保留小数点后一位)

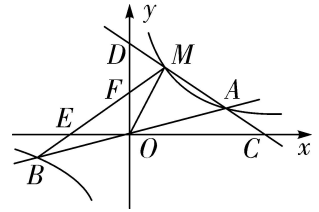
17. 如图, 要测量池塘两岸相对的 A, B 两点间的距离, 可以在池塘外选一点 C , 连接 AC, BC , 分别取 AC, BC 的中点 D, E , 测得 $DE=50$ m, 则 AB 的长是_____ m.



(第 17 题图)

18. 如图, 函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k > 0$) 的图象与过原点 O 的直线相交于 A, B 两点, 点 M 是第一象限内双曲线上的动点(点 M 在点 A 的左侧), 直线 AM 分别交 x 轴, y 轴于 C, D 两点, 连接 BM 分别交 x 轴, y 轴于点 E, F , 现有以下四个结论:

- ① $\triangle ODM$ 与 $\triangle OCA$ 的面积相等; ② 若 $BM \perp AM$ 于点 M , 则 $\angle MBA = 30^\circ$; ③ 若 M 点的横坐标为 1, $\triangle OAM$ 为等边三角形, 则 $k = 2 + \sqrt{3}$; ④ 若 $MF = \frac{2}{5}MB$, 则 $MD = 2MA$. 其中正确结论的序号是_____.



(第 18 题图)

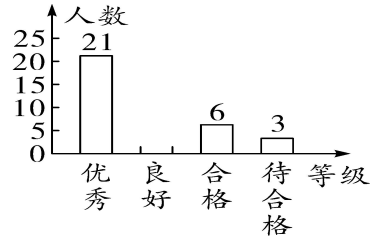
三、解答题(本大题共 8 个小题, 第 19、20 题每小题 6 分, 第 21、22 题每小题 8 分, 第 23、24 题每小题 9 分, 第 25、26 题每小题 10 分, 共 66 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 计算: $|- \sqrt{2}| + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt{6} \div \sqrt{3} - 2\cos 60^\circ$.

20. 先化简, 再求值: $\left(\frac{a+3}{a-1} - \frac{1}{a-1}\right) \div \frac{a^2+4a+4}{a^2-a}$, 其中 $a=3$.

21. 某学校开展了主题为“垃圾分类，绿色生活新时尚”的宣传活动. 为了解学生对垃圾分类知识的掌握情况, 该校环保社团成员在校园内随机抽取了部分学生进行问卷调查, 将他们的得分按优秀、良好、合格、待合格四个等级进行统计, 并绘制了如下不完整的统计表和条形统计图.

等级	频数	频率
优秀	21	42%
良好	m	40%
合格	6	$n\%$
待合格	3	6%

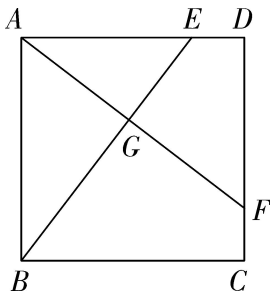


请根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) 本次调查随机抽取了_____名学生; 表中 $m=$ _____, $n=$ _____;
- (2) 补全条形统计图;
- (3) 若全校有 2000 名学生, 请你估计该校掌握垃圾分类知识达到“优秀”和“良好”等级的学生共有多少人.

22. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 AD, CD 上, 且 $DE=CF$, AF 与 BE 相交于点 G .

- (1) 求证 $BE=AF$;
- (2) 若 $AB=4, DE=1$, 求 AG 的长.



23. 近日, 长沙市教育局出台《长沙市中小学教师志愿辅导工作实施意见》, 鼓励教师参与志愿辅导. 某区率先示范, 推出名师公益大课堂, 为学生提供线上线下免费辅导. 据统计, 第一批公益课受益学生 2 万人次, 第三批公益课受益学生 2.42 万人次.

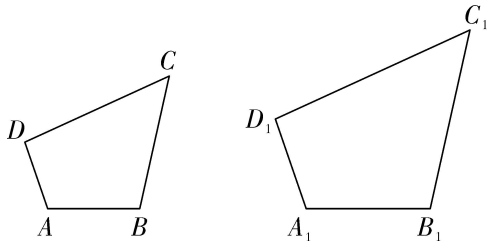
- (1) 如果第二批, 第三批公益课受益学生人次的增长率相同, 求这个增长率;
- (2) 按照这个增长率, 预计第四批公益课受益学生将达到多少万人次?

24. 根据相似多边形的定义，我们把四个角分别相等，四条边成比例的两个凸四边形叫做相似四边形．相似四边形对应边的比叫做相似比．

(1) 某同学在探究相似四边形的判定时，得到如下三个命题，请判断它们是否正确(直接在横线上填写“真”或“假”)．

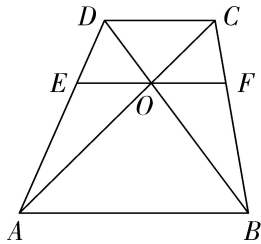
- ① 四条边成比例的两个凸四边形相似；(_____命题)
- ② 三个角分别相等的两个凸四边形相似；(_____命题)
- ③ 两个大小不同的正方形相似．(_____命题)

(2) 如图①，在四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 中， $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ ， $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$ ， $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$ ．求证：四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似；



(第 24 题图①)

(3) 如图②，四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， AC 与 BD 相交于点 O ，过点 O 作 $EF \parallel AB$ 分别交 AD ， BC 于点 E ， F ，记四边形 $ABFE$ 的面积为 S_1 ，四边形 $EFCD$ 的面积为 S_2 ，若四边形 $ABFE$ 与四边形 $EFCD$ 相似，求 $\frac{S_2}{S_1}$ 的值．



(第 24 题图②)

25. 已知抛物线 $y = -2x^2 + (b-2)x + (c-2020)$ (b, c 为常数).

(1) 若抛物线的顶点坐标为 $(1, 1)$, 求 b, c 的值;

(2) 若抛物线上始终存在不重合的两点关于原点对称, 求 c 的取值范围;

(3) 在(1)的条件下, 存在正实数 $m, n (m < n)$, 当 $m \leq x \leq n$ 时, 恰好有 $\frac{m}{2m+1} \leq \frac{1}{y+2} \leq \frac{n}{2n+1}$, 求 m, n 的值.

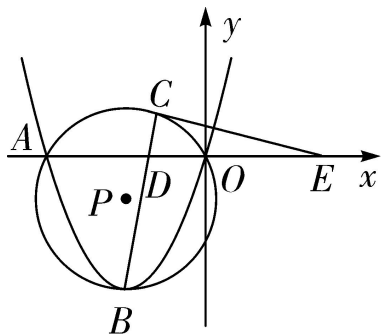
26. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + 6ax$ (a 为常数, $a > 0$) 与 x 轴交于 O, A 两点, 点 B 为抛物线的顶点, 点 D 的坐标为 $(t, 0)$ ($-3 < t < 0$), 连接 BD 并延长与过 O, A, B 三点的 $\odot P$ 相交于点 C .

(1) 求点 A 的坐标;

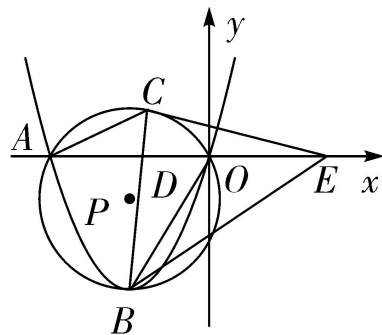
(2) 过点 C 作 $\odot P$ 的切线 CE 交 x 轴于点 E .

① 如图①, 求证 $CE = DE$;

② 如图②, 连接 AC, BE, BO , 当 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle CAE = \angle OBE$ 时, 求 $\frac{1}{OD} - \frac{1}{OE}$ 的值.



图①



图②

第 26 题图

2019 年长沙市初中业水平考试数学试卷解析

1. A

2. C 【解析】将一个大于 10 的数用科学记数法表示，其形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 的值为原数的整数位数减 1， $\therefore 15000000000 = 1.5 \times 10^{10}$.

3. B 【解析】逐项分析如下：

选项	逐项分析	正误
A	$3a$ 与 $2b$ 不是同类项，无法计算	珠
B	$(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = a^6$	√
C	$a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3 \neq a^2$	珠
D	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$	珠

4. D 【解析】A 选项，购买一张彩票，中奖是随机事件；B 选项，射击运动员射击一次，命中靶心是随机事件；C 选项，经过有交通信号灯的路口，遇到红灯是随机事件；D 选项，任意画一个三角形，其内角和是 180° 是必然事件.

5. C 【解析】 $\because \angle 1 = 80^\circ$ ， $\therefore \angle AED = 80^\circ$. $\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

6. D 【解析】 \because 俯视图为圆， \therefore 该几何体为圆柱或圆锥. \because 左视图和主视图为三角形， \therefore 该几何体为圆锥.

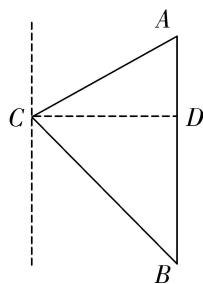
7. B 【解析】小明要判断是否进入前 5 名，只要把自己的成绩与 11 名参赛同学成绩的中位数进行大小比较.

C 【解析】 \because 扇形的半径为 6，圆心角为 120° ， $\therefore S_{\text{扇形}} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 6^2}{360} = 12\pi$.

9. B 【解析】由题意作图可知， MN 为 AB 的垂直平分线， $\therefore \angle DAB = \angle B = 30^\circ$ ，

$\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\therefore \angle CAB = 90^\circ - \angle B = 60^\circ$. $\therefore \angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

10. D 【解析】如解图，作 $CD \perp AB$ 于点 D ，在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $\angle ACD = 30^\circ$ ， $AC = 60$ n mile， $\therefore AD = AC \cdot \sin \angle ACD = 30$ n mile. $CD = AC \cdot \cos \angle ACD = 30\sqrt{3}$ n mile. $\because \angle BCD = 45^\circ$ ， $\angle CDB = 90^\circ$ ， $\therefore BD = CD = 30\sqrt{3}$ n mile， $\therefore AB = AD + BD = 30 + 30\sqrt{3}$ n mile. (第 10 题解图)



11. A 【解析】由题意可得，
$$\begin{cases} y = x + 4.5, \\ 0.5y = x - 1. \end{cases}$$

12. B 【解析】如解图，过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F ，易证 $\triangle BDF \sim \triangle BAE$ ，则 $\angle BDF = \angle A$ ， $\therefore \tan \angle BDF = \tan A$

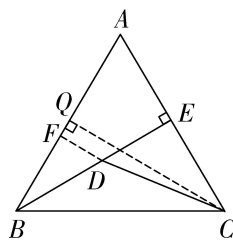
$= 2$ ， $\therefore \cos \angle BDF = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\therefore DF = BD \cdot \cos \angle BDF = \frac{\sqrt{5}}{5} BD$ ，

$\therefore CD + \frac{\sqrt{5}}{5} BD = CD + DF$ ， $\therefore CD + \frac{\sqrt{5}}{5} BD$ 的最小值即为点 C 到 AB 的垂线段 CQ 的长度，

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 中， $\tan A = 2$ ， $AB = 10$ ， $\therefore BE = 4\sqrt{5}$ ，又 $\because AB = AC$ ， $\therefore \triangle ACQ \cong \triangle ABE$ 。

$\therefore CQ = BE = 4\sqrt{5}$ 。

第 12 题解图



13. $x \geq 5$ 【解析】由题意得， $x - 5 \geq 0$ ，解得 $x \geq 5$ 。

14. $a(m+3)(m-3)$ 【解析】 $am^2 - 9a = a(m^2 - 9) = a(m+3)(m-3)$ 。

15. $-1 \leq x < 2$ 【解析】原不等式组为 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \text{ ①,} \\ 3x-6 < 0 \text{ ②,} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x \geq -1, \\ x < 2. \end{cases}$ \therefore 不等式组的解集是 $-1 \leq x < 2$ 。

16. 0.4 【解析】通过大量重复试验后发现，摸到黑球的概率稳定于 0.4。

17. 100 【解析】 $\because D$ 是 AC 的中点， E 是 BC 的中点， $\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $\therefore DE = \frac{1}{2}AB$ ， $\because DE = 50$ m，

$\therefore AB = 2DE = 100$ m。

18. ①③④ 【解析】①设 A 的坐标为 $(a, \frac{k}{a})$ ， M 为 $(b, \frac{k}{b})$ ，直线 CD ： $y = k_1x + b_1$ 。把 A 、 M 点坐标代入直线 CD

解析式，得
$$\begin{cases} \frac{k}{a} = ak_1 + b_1, \\ \frac{k}{b} = bk_1 + b_1, \end{cases}$$
 解得： $k_1 = -\frac{k}{ab}$ ， $b_1 = \frac{(a+b)k}{ab}$. $\therefore y = -\frac{k}{ab}x + \frac{(a+b)k}{ab}$ ， $\therefore D(0, \frac{a+b}{ab}k)$ ， $C(a+b, 0)$ 。

$$\therefore S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \frac{k}{a} = \left(\frac{a+b}{2a}\right)k, \quad S_{\triangle OMD} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{ab}\right)k \cdot b = \left(\frac{a+b}{2a}\right)k,$$

$\therefore S_{\triangle ODM} = S_{\triangle OCA}$, 结论①正确;

②若 $BM \perp AM$, $\because O$ 是 AB 中点, $\therefore OM = OA$, 设 $A(a, b)$, $M(b, a)$,

$\therefore \angle AOC = \angle MOD = \angle EOB$, $OM = OB$, 只有当 $\angle AOC = 15^\circ$ 时, $\angle MBA$ 才为 30° ,

$\therefore a, b$ 不确定, $\therefore \angle AOC$ 不一定为 15° , 结论②错误; ③ M 为 $(1, k)$, $OM = OA$,

$$\therefore A(k, 1), \quad OM^2 = 1 + k^2, \quad AM^2 = (1-k)^2 + (k-1)^2.$$

$\because OM = AM$, $\therefore 1 + k^2 = 2(1-k)^2$, 解得 $k = 2 + \sqrt{3}$ 或 $2 - \sqrt{3}$ (舍), 结论③正确;

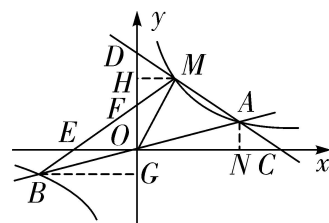
④如解图, 分别过点 M, B 作 y 轴的垂线, 垂足为 H, G ,

$$\because MF = \frac{2}{5}MB, \therefore \frac{MH}{BG} = \frac{2}{3}, \text{ 在①的基础上, } \therefore \frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \quad OC = a+b, \quad OD = \left(\frac{a+b}{ab}\right)k,$$

$$\therefore \frac{MD}{DC} = \frac{MH}{OC} = \frac{b}{a+b} = \frac{2}{5}, \quad MD = \frac{2}{5}DC. \text{ 过点 } A \text{ 作 } AN \perp x \text{ 轴, 垂足为点 } N.$$

$$\therefore \frac{CA}{CD} = \frac{AN}{OD} = \frac{2}{5}, \quad CA = \frac{2}{5}DC,$$

$$\therefore AM = \frac{1}{5}DC, \quad \therefore MD = 2MA. \text{ 结论④正确.}$$



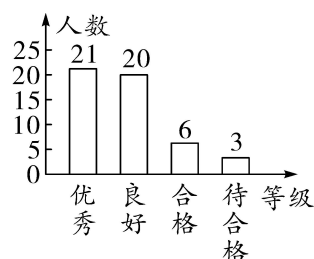
第 18 题解

19. 解: 原式 $= \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} - 1 = 1$.

20. 解: 原式 $= \frac{a+2}{a-1} \times \frac{a(a-1)}{(a+2)^2} = \frac{a}{a+2}$. 当 $a=3$ 时, 原式 $= \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$.

21. 解: (1) 50, 20, 12;

【解法提示】抽取的学生人数为: $21 \div 42\% = 50$ (人), $m = 40\% \times 50 = 20$, $n\% = 1 - 42\% - 40\% - 6\% = 12\%$, 即 $n = 12$. (2) 补全条形统计图如解图;



(3) $2000 \times (42\% + 40\%) = 1640$ (人),

答: 可估计该校掌握垃圾分类的知识达到“优秀”和“良好”等级的学生共有 1640 人.

22. 解: (1) \because 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD, \quad \angle BAE = \angle ADF = 90^\circ.$$

又 $\because DE = CF$,

$$\therefore AD - DE = DC - CF, \text{ 即 } AE = DF.$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD, \\ \angle BAE = \angle ADF, \\ AE = DF, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF (\text{SAS}) \therefore BE = AF;$$

(2) $\because AB = 4, DE = 1, \therefore AE = 4 - 1 = 3$.

(3) $\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

由(1)知, $\angle EBA = \angle FAD$,

$$\therefore \angle FAD + \angle AEB = \angle EBA + \angle AEB = 90^\circ, \text{ 即 } \angle AGE = 90^\circ = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle AGE \sim \triangle BAE.$$

$$\therefore \frac{AG}{AB} = \frac{AE}{BE}, \text{ 即 } \frac{AG}{4} = \frac{3}{5}, \text{ 解得 } AG = \frac{12}{5}.$$

23. 解: (1) 设增长率为 x ,

由题意可得, $2(1+x)^2 = 2.42$,

解得 $x_1 = -2.1$ (舍), $x_2 = 0.1$,

\therefore 增长率为 10%;

(2) $2.42 \times (1 + 0.1) = 2.662$ (万人),

\therefore 按照这个增长率, 预计第四批公益课受益学生将达到 2.662 万人.

24. 解: (1)①假;

【解法提示】四个角不一定相等, 例: 边长成比例的正方形和菱形. ②假;

【解法提示】四条边不一定成比例, 例: 正方形与长方形. ③真;

(2)证明: 如解图, 分别连接 BD, B_1D_1 ,

$$\because \angle BCD = \angle B_1C_1D_1, \text{ 且 } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1},$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle B_1C_1D_1.$$

$$\therefore \angle CDB = \angle C_1D_1B_1, \angle CBD = \angle C_1B_1D_1, \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}, \therefore \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

$$\because \angle ABC = \angle A_1B_1C_1, \angle CBD = \angle C_1B_1D_1, \therefore \angle ABD = \angle A_1B_1D_1. \therefore \triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1.$$

$$\because \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}, \angle A = \angle A_1, \angle ADB = \angle A_1D_1B_1, \therefore \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1}, \angle ADC = \angle A_1D_1C_1,$$

$$\angle A = \angle A_1, \angle ABC = \angle A_1B_1C_1, \angle BCD = \angle B_1C_1D_1.$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似;

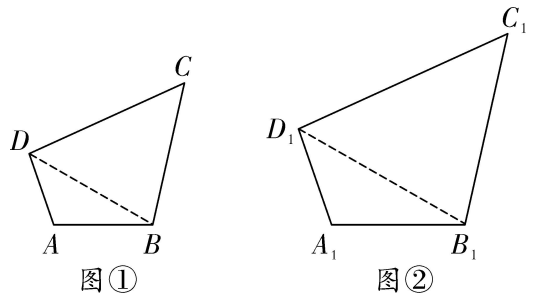
$$(3) \because \text{四边形 } ABFE \text{ 与四边形 } EFCD \text{ 相似}, \therefore \frac{DE}{AE} = \frac{EF}{AB}.$$

$$\because EF = OE + OF, \therefore \frac{DE}{AE} = \frac{OE + OF}{AB}.$$

$$\because EF \parallel AB \parallel CD, \therefore \frac{DE}{AD} = \frac{OE}{AB}, \frac{DE}{AD} = \frac{OC}{AC} = \frac{OF}{AB}.$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} + \frac{DE}{AD} = \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AB}. \therefore \frac{2DE}{AD} = \frac{EF}{AB} = \frac{DE}{AE}.$$

$$\because AD = DE + AE, \therefore \frac{2}{DE + AE} = \frac{1}{AE}. \therefore 2AE = DE + AE, \text{ 即 } AE = DE. \therefore \frac{S_1}{S_2} = 1.$$



$$25. \text{解: (1)由题意可得: } -\frac{b-2}{2 \times (-2)} = 1, \text{ 解得: } b=6.$$

把(1, 1)代入抛物线解析式得: $-2 + b - 2 + c - 2020 = 1$, 解得: $c = 2019$;

(2)设其中一个点坐标为 $(m, -2m^2 + (b-2)m + (c-2020))$, 则其关于原点对称点的坐标为 $(-m, 2m^2 - (b-2)m - (c-2020))$, 又 \because 两点不重合, $\therefore m \neq 0$. 由题意得此点在抛物线上,

$$\therefore 2m^2 - (b-2)m - (c-2020) = -2m^2 - (b-2)m + (c-2020),$$

$$\text{化简得: } 2m^2 = c - 2020. \therefore c = 2020 + 2m^2. \text{ 又 } \because m \neq 0, \therefore c > 2020;$$

$$(3) \text{由(1)可知抛物线为 } y = -2x^2 + 4x - 1 = -2(x-1)^2 + 1, \therefore y \leq 1.$$

$$\because 0 < m < n, \text{ 当 } m \leq x \leq n \text{ 时, 恰好有 } \frac{m}{2m+1} \leq \frac{1}{y+2} \leq \frac{n}{2n+1}, \therefore \frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{m}. \therefore \frac{1}{m} \leq 1, \text{ 即 } m \geq 1. \therefore 1 \leq m < n.$$

\because 抛物线对称轴 $x=1$, 开口向下, \therefore 当 $m \leq x \leq n$ 时, y 随 x 增大而减小.

$$\therefore \text{当 } x=m \text{ 时, } y_{\max} = -2m^2 + 4m - 1, \text{ 当 } x=n \text{ 时, } y_{\min} = -2n^2 + 4n - 1, \text{ 又 } \because \frac{1}{n} \leq y \leq \frac{1}{m},$$

$$\therefore \begin{cases} -2n^2 + 4n - 1 = \frac{1}{n}, & \text{①} \\ -2m^2 + 4m - 1 = \frac{1}{m}. & \text{②} \end{cases}$$

将①整理得: $2n^3 - 4n^2 + n + 1 = 0. \therefore$ 变形得: $(2n^3 - 2n^2) - (2n^2 - n - 1) = 0$, 即: $2n^2(n-1) - (2n+1)(n-1) = 0.$

$$\therefore (n-1)(2n^2 - 2n - 1) = 0. \therefore n > 1, \therefore 2n^2 - 2n - 1 = 0. \therefore n_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ (舍去)}, n_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

同理整理②得: $(m-1)(2m^2 - 2m - 1) = 0.$

$$\therefore 1 \leq m < n,$$

$$\therefore m_1 = 1, m_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ (舍去)}, m_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ (舍去)}. \therefore \text{综上所述, } m=1, n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

26. 解: (1) 令 $ax^2+6ax=0$, $ax(x+6)=0$, 解得 $x_1=0$, $x_2=-6$.

$\therefore A(-6, 0)$;

(2) ① 如解图, 连接 PC , 连接 BP 并延长交 x 轴于点 M ,

$\because \odot P$ 过 O, A, B 三点, B 为顶点,

$\therefore PM \perp OA$, $\angle PBC + \angle BDM = 90^\circ$.

又 $\because PC = PB$,

$\therefore \angle PCB = \angle PBC$.

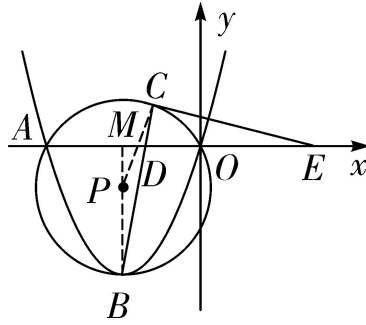
$\because CE$ 为切线,

$\therefore \angle PCB + \angle ECD = 90^\circ$,

又 $\because \angle BDM = \angle CDE$,

$\therefore \angle ECD = \angle CDE$.

$\therefore CE = DE$.



② 设 $OE = m$, 即 $E(m, 0)$,

由切割线定理: $CE^2 = OE \cdot AE$.

即 $(m-t)^2 = m \cdot (m+6)$, 解得 $m = \frac{t^2}{6+2t}$ ①.

$\because \angle CAE = \angle CBO$,

已知 $\angle CAE = \angle OBE$, $\therefore \angle CBO = \angle EBO$,

由角平分线定理得: $\frac{BD}{BE} = \frac{DO}{OE}$,

即: $\sqrt{\frac{(3+t)^2+27}{(3+m)^2+27}} = \frac{-t}{m}$, 解得 $m_1 = \frac{6t}{-t-6}$ ②, $m_2 = \frac{t^2+6t}{6+6t}$ (舍),

由①②得 $\frac{t^2}{6+2t} = \frac{6t}{-t-6}$, 化简为 $t^2+18t+36=0$,

$\therefore t^2 = -18t - 36$.

$\therefore \frac{1}{OD} - \frac{1}{OE} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{m} = -\frac{3t+6}{t^2} = \frac{1}{6}$.